Title	準線型波動方程式系に対する存在定理 (非線形波動および分散型方程式に関する研究)
Author(s)	久保, 英夫; 星賀, 彰
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1355: 1-23
Issue Date	2004-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/25168
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 1-23

準線型波動方程式系に対する存在定理

大阪大学・理　久保 英夫　(Hideo Kubo)
Graduate School of Science, Osaka University
静岡大学・工　星賀 彰　(Akira Hoshiga)
Faculty of Engineering, Shizuoka University

1. はじめに

このノートでは次のような非線型波動方程式系を考察する:

$$(\partial_t^2 - c_i^2\Delta)u_i = F_i(u, \partial u, \partial\nabla u), \quad (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \quad (1 \le i \le N). \tag{1.1}$$

ここで, $\partial = (\partial_0, \partial_1, \cdots, \partial_n) = (\partial_t, \nabla)$, $\nabla = (\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n})$, c_i は正数であり, $u(t,x) = (u_i(t,x))_{1\le i\le N}$ は $\mathbb{R}^N$ に値をとる実数値関数とする. いわゆる"微分の損失"を避けるため, 解 $u(t,x)$ は十分滑らかであるとする. このため, 非線形項 $F(u,v,w) = (F_i(u,v,w))_{1\le j\le N}$ もまたその変数 (u,v,w) に関して滑らかであるとする. 但し, 変数

$$v = (v_{aj};\ 0\le a\le n,\ 1\le j\le N) \in \mathbb{R}^{(1+n)\times N},$$

$$w = (w_{alj};\ 0\le a\le n,\ 1\le l\le n,\ 1\le j\le N) \in \mathbb{R}^{(1+n)\times n\times N}$$

はそれぞれ $(\partial_a u_j)$, $(\partial_a\partial_l u_j)$ に対応しているものとする. 加えて, $u\equiv 0$ が (1.1) の解となるように $F_i(0,0,0) = 0$ $(1\le i\le N)$ を仮定する.

さて, 方程式系 (1.1) を次の斉次波動方程式系 (1.2) の小さな摂動とみなす場合, 非線形項 $F(u,v,w)$ の原点 $(u,v,w)=0$ 付近における退化次数が低いほど興味深い問題である:

$$(\partial_t^2 - c_i^2\Delta)u = 0, \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \quad (i = 1,2,\cdots,N). \tag{1.2}$$

以下では, $F(u,v,w)$ が p-次であるとは次の意味とする: 適当な正数 C と δ が存在し,

$$\sum_{i=1}^N |F_i(u,v,w)| \le C(|u|^p + |v|^p + |w|^p) \quad \text{for} \quad |u|+|v|+|w| \le \delta \tag{1.3}$$

を満たす. このことを単に

$$F(u,\partial u,\partial\nabla u) = O(|u|^p + |\partial u|^p + |\partial\nabla u|^p).$$

と略記することもある. また, $F(u,v,w)$ の原点 $(u,v,w)=0$ 付近における Taylor 展開の p 次の項を $F^{(p)}$ と表すことにする.

一般性を失うことなく, F は w に関して1次式であると仮定してよいことが知られている (例えば, Courant and Hilbert [8], chapter I, section 7 など). つまり, $F = (F_1, \cdots, F_N)$ は次のように書ける:

$$F_i(u,v,w) = \sum_{a,b=0}^{n} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i^{abj}(u,v) w_{abj} + \beta_i(u,v). \tag{1.4}$$

ここで, α_i^{abj}, β_i $(a, b = 0, \cdots, n;\ i, j = 1, \cdots, N)$ は (u, v) に関する適当な滑らかな関数である. (1.4) が成り立つとき, (1.1) は準線型波動方程式系と呼ばれる.

このノートで考えたい問題は如何なる条件のもとで, 方程式系 (1.1) に対する初期値問題が時間大域的に滑らかな解をもつかというものである. 以下で, **small data global existence** は初期値を十分小さく選ぶなら (1.1) が大域解をもつことを意味し, **blow-up** は **small data global existence** が成立しないことを意味するものとする. 言い換えれば, 適当な初期値に対して解の最大存在時刻が有限であるとき, **blow-up** という. 結果を述べる前に, 既知の結果を振り返ることにする.

まず, $n = 3$ のとき, John [18] は F が 2-次の場合に, 方程式系 (1.1) に対する初期値問題の解は初期値のサイズに関わらず有限時間内に特異性をもち得ることを示した. 典型的な例としては,

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = (\partial_t u)^2, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \tag{1.5}$$

や

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = u(\partial_t u), \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \tag{1.6}$$

等が挙げられる. また, Agemi [1] は, $n = 2$ のとき,

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = |\partial_t u|^p, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \tag{1.7}$$

や

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = \partial_t |u|^p, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \tag{1.8}$$

等について, $1 < p \le 3$ ならば同じ結論が得られることを示した. 従って, (1.1) に対する初期値問題の大域可解性を論ずるには, $n = 3$ の場合 $F^{(2)}$ に, また $n = 2$ の場合 $F^{(2)}$ および $F^{(3)}$ に何らかの制限が必要であることが分かる. この疑問に対する答えは, $n = 3$ のとき, Christodoulou [7] および Klainerman [27] により独立に与えられた. 即ち, $F^{(2)}$ がいわゆる **null condition** と呼ばれる次の条件を満たせば, **small data**

global existence が成り立つというものである: 全ての $i \in \{1, \cdots, N\}$, λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}^N$ および $X \in \mathcal{N}_i$ に対して

$$F_i^{(2)}(\lambda, V(\mu, X), W(\nu, X)) = 0 \tag{1.9}$$

が成り立つ. ここで, 次のような記号を用いた:

$$\mathcal{N}_i = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} : X_0^2 = c_i^2(X_1^2 + \cdots + X_n^2)\} \quad (i \in \{1, \cdots, N\})$$

とおくとき, μ, $\nu \in \mathbb{R}^N$ および $X \in \mathcal{N}_i$ に対して

$$\begin{aligned} V(\mu, X) &= (X_a \mu_j;\ 0 \le a \le n,\ 1 \le j \le N), \\ W(\nu, X) &= (X_a X_l \nu_j;\ 0 \le a \le n,\ 1 \le l \le n,\ 1 \le j \le N) \end{aligned}$$

とする. また, $n = 2$ のとき, F が (1.3) を $p = 3$ として満たし, 同時に全ての $i \in \{1, \cdots, N\}$, λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}^N$ および $X \in \mathcal{N}_i$ に対して

$$F_i^{(3)}(\lambda, V(\mu, X), W(\nu, X)) = 0 \tag{1.10}$$

を仮定すれば, 同じ結論が成り立つことを Katayama [21] は示した. さらに, F が未知関数自身に陽に依存しない場合に, Alinhac [5] は $F^{(2)}$ と $F^{(3)}$ がそれぞれ (1.9), (1.10) を満たせば, **small data global existence** が成り立つことを示した.

逆に, F が未知関数自身に陽に依存しない場合, **small data global existence** を示すには, $n = 3$ のときは $F^{(2)}$ が (1.9) を満たすことが必要であり, $n = 2$ のときは $F^{(2)}$ および $F^{(3)}$ がそれぞれ (1.9), (1.10) を満たすことが必要であることが, Alinhac [3, 4] により明らかにされている (先行する研究は [19, 12, 10, 13] など). ところが, F が未知関数自身に陽に依存する場合には異なる状況が起こり得る. 実際,

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = u\,\Delta u, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \tag{1.11}$$

に対して, **small data global existence** が成り立つことを, 球対称解について Lindblad [35] が, そして一般の場合に Alinhac [6] が示した.

次に, 伝播速度が互いに異なる場合に話を進める. この場合に **small data global existence** が成立しやすいことは, Kovalyov [30] によって指摘された.

まず, $n = 3$ の場合を考える. 簡単の為, (1.4) において $\alpha_i^{abj}(u, v) \equiv 0$ を仮定する. 即ち, 非線型項 F が未知関数の二階微分に依存しない場合を考える. すると, $p = 2$ と

して (1.3) をみたすような F は次のように書き下せる:

$$
\begin{aligned}
F_i(u,\partial u) &= \sum_{j,k=1}^{N} A_i^{j,k} u_j u_k + \sum_{a=0}^{n}\sum_{j,k=1}^{N} B_i^{a,j,k} u_j \partial_a u_k \\
&\quad + \sum_{a,b=0}^{n}\sum_{j,k=1}^{N} D_i^{a,b,j,k} \partial_a u_j \partial_b u_k + H_i(u,\partial u).
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

ここで, $A_i^{j,k}$, $B_i^{a,j,k}$ および $D_i^{a,b,j,k}$ は定数であり, $H_i(u,v)$ は次を満たすものとする:

$$H_i(u,v) = O(|u|^3 + |v|^3). \tag{1.13}$$

$H_i(u,\partial u)$ を高次の摂動項とみなすためには, 次のような条件が必要である:

$$A_i^{j,k} = 0 \quad \text{for all} \quad i,j,k = 1,\cdots,N. \tag{1.14}$$

実際, 次のようなシステムについて, $c_1 \geq c_2 > 0$ のとき, **blow-up** の起こることが [32] により示されている:

$$
\begin{cases}
(\partial_t^2 - c_1^2\Delta)u_1 = u_1 u_2, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\
(\partial_t^2 - c_2^2\Delta)u_2 = (u_1)^3, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3.
\end{cases} \tag{1.15}
$$

(1.14) に加えて, さらに (1.12) の右辺第二項が消えている場合, 即ち

$$B_i^{a,j,k} = 0 \quad \text{for all} \quad i,j,k = 1,\cdots,N \text{ and } a = 0,\cdots,n \tag{1.16}$$

であるような場合を考える. このとき, Katayama [22] は次のことを示した. もし (1.14), (1.16) が成り立ち, かつ各 F_i ($i \in \{1,\cdots,N\}$) の二次の項が次の条件を満たすなら, **small data global existence** が成り立つ: 全ての $i \in \{1,\cdots,N\}$, λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}^N$ および $X \in \mathcal{N}_i$ に対して

$$F_i^{(2)}(\lambda, \tilde{V}(\mu,X), \tilde{W}(\nu,X)) = 0 \tag{1.17}$$

が成り立つ. ここで, δ_{ij} を Kronecker のデルタとし, μ, $\nu \in \mathbb{R}^N$ および $X \in \mathcal{N}_i$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\tilde{V}(\mu,X) = (X_a \delta_{ij}\mu_j;\ 0 \leq a \leq n,\ 1 \leq j \leq N), \\
&\tilde{W}(\nu,X) = (X_a X_l \delta_{ij}\nu_j;\ 0 \leq a \leq n,\ 1 \leq l \leq n,\ 1 \leq j \leq N),
\end{aligned}
$$

とおいた. (関連する結果としては, Kubota and Yokoyama [33], Yokoyama [40] など. また, $F(u,v,w) \equiv F(v,w)$ の場合に, Klainerman and Sideris [29] の手法に基づく [40] の別証明は Sideris and Tu [38], Sogge [39], Hidano [11].)

ここで，(1.17) を満たす関数 F_i が必ずしも (1.9) を満たすとは限らないことを注意しておく．例えば，

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c_1^2\Delta)u_1 = a(\partial_t u_1)(\partial_t u_2), & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ (\partial_t^2 - c_2^2\Delta)u_2 = b(\partial_t u_1)(\partial_t u_2), & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.18}$$

の右辺のみならず，

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c_1^2\Delta)u_1 = a(\partial_t u_2)^2, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ (\partial_t^2 - c_2^2\Delta)u_2 = b(\partial_t u_1)^2, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.19}$$

の右辺もまた，$a = b = 0$ ではない限り (1.9) は満たさないが，勝手な $a, b \in \mathbb{R}$ に対して (1.17) を満たす．これは伝播速度が異なる場合には，そうでない場合と較べ，より広いクラスの非線型項に対して存在定理を示すことができることを意味している．

一方，Katayama and Yokoyama [24] は条件 (1.16) が成り立たない場合を考察している．彼らの結果は，(1.14) と (1.16) より弱い

$$B_i^{a,i,i} = 0 \quad \text{for all} \quad i = 1, \cdots, N,\ a = 0, \cdots, n \tag{1.20}$$

を仮定し，F_i を (1.12) のように表すときのその一部 $N_{ij}(\partial u_j) = \sum_{a,b=0}^{n} D_i^{a,b,j,j}(\partial_a u_j)(\partial_b u_j)$ が次を満たせば，**small data global existence** が成り立つというものである：全ての $i, j \in \{1, \cdots, N\}$, $\mu \in \mathbb{R}$ および $X \in \mathcal{N}_j$ に対して

$$N_{ij}(V(\mu, X)) = 0. \tag{1.21}$$

一見すると上の結果では，N_{ij} に対する条件がきついように思われるが，Ohta [37] によって得られた次の反例から，一般には $j \neq i$ なる j についても，N_{ij} に何らかの制限が必要であることが分かる．その反例とは，$0 < c_1 < c_2$ のとき，次のシステムの解は有限時間内に爆発し得るというものである：

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c_1^2\Delta)u_1 = u_2(\partial_t u_1), & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ (\partial_t^2 - c_2^2\Delta)u_2 = (\partial_t u_1)^2, & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \end{cases}. \tag{1.22}$$

次に，$n = 2$ の場合を考える．非線型項 F が未知関数自身に陽には依存しない場合，[16] は F が 3-次であって，$F^{(3)}$ が (1.10) を満たすとき，**small data global existence** が成り立つことを示した．(先行する研究は，Agemi and Yokoyama [2], [30] など.) [16] により，次のような *null form*

$$Q_0(\phi, \psi) := (\partial_t \phi)(\partial_t \psi) - c^2 \nabla\phi \cdot \nabla\psi \tag{1.23}$$

を，伝播速度が異なる場合に扱うには, (2.15) が有効であることが初めて指摘された. さらに, Hoshiga [14, 15] は，(1.9) または (1.10) が成り立たない場合の最大存在時刻の詳細な評価を導いた.

さて，F が未知関数自身に陽に依存する場合に [22] と同様な結果が得られるかどうかという問題があるが，これについて，[17] は以下のような結果を得た.

Theorem 1. F_i は次のように分解できるものとする:

$$\begin{aligned} & F_i(u,\partial u,\partial\nabla u) \\ = & \sum_{j=1}^{N} N_{ij}(u,\partial u_j,\partial\nabla u_j)+R_i(u,\partial u,\partial\nabla u)+H_i(u,\partial u,\partial\nabla u). \end{aligned} \tag{1.24}$$

ここで，H_i は

$$H_i(u,v,w)=O(|u|^4+|v|^4+|w|^4) \tag{1.25}$$

を満たし, N_{ij} は $(u,\partial u_j,\partial\nabla u_j)$ のみによる斉次三次多項式, そして R_i は $(u,\partial u,\partial\nabla u)$ の斉次三次多項式で次のように書けるものとする:

$$R_i(u,\partial u,\partial\nabla u)=\sum_{\substack{j,k,l=1,\cdots,N\\ k\neq l}}\ \sum_{|\alpha|\le 1,|\beta|=1,|\gamma|\le 1} q^{ijkl}_{\alpha\beta\gamma}(\partial^\alpha u_j)(\partial^\beta u_k)(\nabla^\gamma\partial u_l). \tag{1.26}$$

但し，$q^{ijkl}_{\alpha\beta\gamma}$ は定数. このとき，N_{ij} が全ての $i,\ j\in\{1,\cdots,N\}$, $\lambda\in\mathbb{R}^N$, $\mu,\ \nu\in\mathbb{R}$ および $X\in\mathcal{N}_j$ に対して

$$N_{ij}(\lambda,V(\mu,X),W(\nu,X))=0 \tag{1.27}$$

を満たせば，**small data global existence** が成り立つ.

Remark 1. $n=2$ のときの困難は, 未知関数自身の L^2-ノルムを上手く制御しきれないことにある. ここでは，その代わりに $\dot{H}^\rho$ $(0<\rho<<1)$ を (4.11) を使って評価する.

2. 零条件

この節を通して, $c_i>0$ $(i\in\{1,\cdots,N\})$ とする. Kubota and Yokoyama [33] によって, いわゆる **null condition** と次のように定義される *radiation operators* が密接に関連していることが指摘された:

$$T_a=\partial_a-\omega_a\partial_r \quad (0\le a\le n). \tag{2.1}$$

ここで，$\partial_r = \dfrac{x}{r}\cdot\nabla$, $\omega_0 = -c_i$ および $\omega_l = \frac{x_l}{r}$ $(1 \le l \le n)$. よって，より具体的には

$$T_0 = \partial_t + c_i\partial_r, \quad T_l = \partial_l - \frac{x_l}{r}\partial_r \ (0 \le l \le n).$$

このとき次が成り立つ.

Lemma 2. $m = 2, 3$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $(v, w) \in \mathbb{R}^{(1+n)\times N} \times \in \mathbb{R}^{(1+n)\times n\times N}$ とする. $G(v, w)$ は斉次 m 次多項式で，全ての μ, $\nu \in \mathbb{R}^N$ および $X \in \mathcal{N}_i$ に対して，

$$G(V(\mu, X), W(\nu, X)) = 0 \tag{2.2}$$

を満たすものとする. また，$u(t, x)$ を $\mathbb{R}^N$-値の滑らかな関数とする. このとき，$|x| \ge 1$ に対して，t, x および u に依存しない正定数 C があって次が成り立つ:

$$\begin{aligned} & |G(\partial u, \partial\nabla u)(t, x)| \qquad (2.3)\\ \le\ & C|\partial u(t, x)|^{m-2}\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|\le 1} |\nabla^\alpha \partial u(t, x)||T\nabla^\beta u(t, x)| + |\partial u(t, x)||T\partial_r u(t, x)|\Big). \end{aligned}$$

Proof. $m = 3$ のときも同様に扱えるので，$m = 2$ のときのみ示す. 仮定から，G は次のように表せる:

$$\begin{aligned} G(\partial u, \partial\nabla u)(t, x) = & \sum_{j,k=1}^{N}\sum_{a,b=0}^{n} A_{a,b}^{i,j,k}\partial_a u_j(t, x)\partial_b u_k(t, x) \qquad (2.4)\\ & + \sum_{j,k=1}^{N}\sum_{a,b=0}^{n}\sum_{c=1}^{n} B_{a,b,c}^{i,j,k}\partial_a u_j(t, x)\partial_b\partial_c u_k(t, x). \end{aligned}$$

ここで，$A_{a,b}^{i,j,k}$, $B_{a,b,c}^{i,j,k}$ は適当な定数である.

$\mu = \partial_r u$, $\nu = \partial_r^2 u$ および $X = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$ と取ると，$X \in \mathcal{N}_i$ なので，(2.2) が成り立つ. よって，(2.4) から

$$\begin{aligned} G(\partial u, \partial\nabla u) &= G(\partial u, \partial\nabla u) - G(V(\mu, X), W(\nu, X))\\ &= \sum_{j,k=1}^{N}\sum_{a,b=0}^{n} A_{a,b}^{i,j,k}[T_a u_j\partial_b u_k + \omega_a\partial_r u_j T_b u_k] \qquad (2.5)\\ &\quad + \sum_{j,k=1}^{N}\sum_{a,b=0}^{n}\sum_{c=1}^{n} B_{a,b,c}^{i,j,k}[T_a u_j\partial_b\partial_c u_k + \omega_a\partial_r u_j T_b\partial_c u_k\\ &\quad + \omega_a\omega_b\partial_r u_j\partial_r T_c u_k] \end{aligned}$$

を得る．最後の項の処理では次の関係式を使う:

$$[\partial_r, T_c] = [\partial_r, \partial_c] = -\frac{1}{r}T_c \quad (1 \le c \le n).$$

ここで, $[A,B] = AB - BA$. 以上により, (2.3) が $m=2$ に対して導かれる． □

さて, **null condition** に由来する特別な構造から導かれるより良い評価を得るために, 次のようなベクトル場を導入する:

$$S = t\partial_t + x \cdot \nabla, \quad \Omega_{jk} = x_j\partial_k - x_k\partial_j \ (1 \le j < k \le n). \tag{2.6}$$

これらと通常の微分作用素 $\partial = (\partial_t, \partial_1, \cdots, \partial_n)$ を併せて, $\Gamma = (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n_0})$ と記すことにする．但し, $n_0 = \dfrac{n(n-1)}{2} + n + 2$. さらに，この Γ と

$$L_i = ct\partial_i + \frac{x_i}{c}\partial_t \quad (1 \le i \le n;\ c > 0) \tag{2.7}$$

を併せたものを Λ と書くことにする．[27] ではこの Λ が効果的に使われた．例えば, Klainerman の不等式と呼ばれる次の不等式が利用できる:

$$\langle t + |x| \rangle^{\frac{n-1}{2}} \langle ct - |x| \rangle^{\frac{1}{2}} |u(t,x)| \le C \sum_{|\alpha| \le [\frac{n}{2}]+1} \|\Lambda^\alpha u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8}$$

(証明については, [28] または [20]). 容易に確かめられるように, ∂, Ω は全ての $c_i > 0$ に対して，$\Box_{c_i}$ と交換可能であり，また

$$[S, \Box_{c_i}] = -2\Box_{c_i}, \tag{2.9}$$

$$[L_j, \Box_{c_i}] = \frac{2}{c}(c_i^2 - c^2)\partial_t\partial_j \quad (1 \le j \le n;\ 1 \le i \le N) \tag{2.10}$$

が成り立つ．従って，(1.1) における伝播速度が全て等しい場合には，$c := c_1^2 = \cdots = c_N$ ととることにより，L_i も $\Box_{c_i}$ と交換可能であることが (2.10) から分かる．故に, (1.1) の解 u に対して，$\|\Lambda^\alpha \partial u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ をエネルギー法を使って評価することができる．同時に, (2.8) を通して, $\partial u(t,x)$ の減衰評価も得られる．

逆に言えば，伝播速度の中に一つでも異なるものが混じっている場合には，(2.8) を使うことができないので別な手法が必要となる．このノートでは, 基本解を直接評価することによって各点評価を導く方法を 4 節で紹介する．

次に，記号をいくつか導入する．$\mathbb{R}^N$-値の滑らかな関数 $v(t,x)$ に対して

$$|v(t,x)|_k = \sum_{|\alpha| \le k} \sum_{i=1}^N |\Gamma^\alpha v_i(t,x)|$$

とおく．ここで, k は非負整数, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n_0})$ は多重指数, $\Gamma^\alpha=\Gamma_1^{\alpha_1}\cdots\Gamma_{n_0}^{\alpha_{n_0}}$ および $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n_0}$ である．次の交換関係により, Γ_j を作用させる順序によって本質的な違いは生まれないことが分かる:

$$[S,\partial_a]=-\partial_a,\quad [S,\Omega_{jk}]=0,\quad [\Omega_{jk},\partial_a]=\eta_{ka}\partial_j-\eta_{ja}\partial_k \tag{2.11}$$
$$[\Omega_{jk},\Omega_{lh}]=\eta_{kl}\Omega_{jh}+\eta_{jh}\Omega_{kl}-\eta_{kh}\Omega_{jl}-\eta_{jl}\Omega_{kh}.$$

ここで, $a,b=0,\cdots,n;\ j,k,l,h=1,\cdots,n$ であり, $\partial_0=\partial_t$, $(\eta_{ab})=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$ とする．加えて,

$$\|v(t)\|_k^2=\int_{\mathbb{R}}|v(t,x)|_k^2dx$$

とおく．以上の準備の下，次の評価が得られる．

Proposition 1. *Lemma 2* の仮定が満たされているものとする．このとき, $|x|/2\le c_it\le 2|x|$, $|x|\ge 1$ なる $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ に対して, t, x および u に依存しない正定数 C があって次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle|G(\partial u,\partial\nabla u)(t,x)| \\ \le\ & C(|\partial u(t,x)|_1)^{m-1}(\langle|x|-c_it\rangle|\partial u(t,x)|_1+|u(t,x)|_1).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Proof. (2.3) から, $|x|/2\le c_it\le 2|x|$, $|x|\ge 1$ なる $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ に対して, 次を示せば十分である:

$$\langle t+r\rangle|Tu(t,x)|\le C(|c_it-r||\partial u(t,x)|+|\Gamma u(t,x)|). \tag{2.13}$$

(2.1) から, $r>0$ に対して

$$T_ju(t,x)=-\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{n}x_k\Omega_{jk}u(t,x)\quad (1\le j\le n) \tag{2.14}$$

が従うので，次を得る:

$$|T_ju(t,x)|\le\frac{n}{r}|\Omega u(t,x)|\quad (1\le j\le n).$$

また, $t>0$ に対して

$$T_0u(t,x)=\frac{c_it-r}{t}\partial_ru(t,x)+\frac{1}{t}Su(t,x) \tag{2.15}$$

が成り立つ．よって，(2.13) が $|x|/2\le c_it\le 2|x|$, $|x|\ge 1$ なる $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ に対して成立する． □

$G(\partial u, \partial\nabla u)(t,x)$ の (t,x) に関する微分について，Lemma 2 および Proposition 1 に対応する評価を得るには次の補題が有効である．

Lemma 3. 滑らかな実数値関数 $u(t,x)$, 非負整数 k, および $|x|/2 \le c_i t \le 2|x|$, $|x| \ge 1$ なる $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して, t, x および u に依存しない正定数 C_k があって次が成り立つ：

$$\langle t+r\rangle |Tu(t,x)|_k \le C_k(\langle c_i t - r\rangle |\partial u(t,x)|_k + |u(t,x)|_{k+1}). \tag{2.16}$$

Proof. $k=0$ のとき, (2.16) は (2.13) そのものである．$k=1$ のときに (2.16) を示すには, 次の関係式に注意すればよい:

$$[S, T_0] = -T_0, \quad [\Omega_{jk}, T_0] = 0, \quad [\partial_l, T_0] = \frac{c_i}{r} T_l, \quad [\partial_t, T_0] = 0,$$
$$[S, T_k] = -T_k, \quad [\partial_l, T_k] = -\frac{1}{r}\delta_{lk}\partial_r + \frac{x_l x_k}{r^3}\partial_r - \frac{x_k}{r^2}T_l, \quad [\partial_t, T_k] = 0$$

および

$$[\Omega_{jk}, T_l] = \eta_{kl}T_j - \eta_{jl}T_k \quad (j,k,l = 1,\cdots,n).$$

これらの関係式は (2.11) と

$$[\partial_l, \partial_r] = \frac{1}{r}T_l, \quad [\Omega_{jk}, \partial_r] = 0, \quad [S, \partial_r] = -\partial_r \tag{2.17}$$

を使って確かめることができる．よって,

$$|\Gamma T_a u(t,x)| \;\; \le \;\; C(|T_a \Gamma u(t,x)| + \sum_{b=0}^{n} |T_b u(t,x)| + \frac{1}{r}|\partial_r u(t,x)|).$$

(2.13) により, (2.16) を $k=1$ に対して結論できる．

さらに, 自然数 m に対して

$$[S, \frac{1}{r^m}] = -\frac{m}{r^m}, \quad [\Omega_{jk}, \frac{1}{r^m}] = 0, \quad [\partial_l, \frac{1}{r^m}] = -\frac{m x_l}{r^{m+2}}$$

が成り立つことに注意すれば, (2.16) が $k \ge 2$ に対しても成り立つことが帰納的に分かる． □

3. 各点評価

この節では，非斉次波動方程式

$$(\partial_t^2 - c_i^2\Delta)u = F, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \quad (i=1,2,\cdots,N). \tag{3.1}$$

の解の各点評価を $n=2$ の場合に考察する ($n=3$ の場合については，[22] など)．まず, (3.1) の解が次のように与えられることはよく知られていてる:

$$L_{c_i}(F)(t,x) = \frac{1}{2\pi c_i}\int_0^t ds \int_{|x-y|<c_i(t-s)} \frac{F(s,y)}{\sqrt{c_i^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}dy. \tag{3.2}$$

ここで, $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^2$, $T>0$.

Proposition 2. $0<\kappa<1/2$, $\mu>0$, $F\in C([0,T)\times\mathbb{R}^2)$ とする．また,

$$0<c_1<c_2<\cdots<c_N \tag{3.3}$$

を仮定する．このとき, 全ての $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^2$ に対して, μ, κ および c_j のみに依存する正定数 C が存在して

$$\begin{aligned} &|L_{c_i}(F)(t,x)|\langle|x|+t\rangle^{\frac12}\langle c_it-|x|\rangle^{\kappa} \\ \le\ & C\sum_{j=0}^{N}\sup_{(s,y)\in\Lambda_j(t)}\{|y|^{\frac12}\langle|y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu}\langle c_js-|y|\rangle|F(s,y)|\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

但し, $i=1,\cdots,N$ に対して,

$$\begin{aligned} &\Lambda_i(t) = \{(s,y)\in[0,t]\times\mathbb{R}^2:\ ||y|-c_is|\le c_{N+1}s,\ |y|\ge1\}, \\ &c_{N+1} = \min_{1\le i\le N}\{c_i-c_{i-1}\}/3, \quad c_0=0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

と定め, $\Lambda_0(t)$ は $\bigcup_{i=1}^{N}\Lambda_i(t)$ の $[0,t]\times\mathbb{R}^2$ における補集合とする.

Proof. $F_c(t,x)=c^{-2}F(t/c,x)$ として $L_c(F)(t,x)=L_1(F_c)(ct,x)$ なので, 一般性を失うことなく, $c_i=1$ と仮定してよい. $\chi_j(s,y)$ を $\Lambda_j(t)$ の特性関数とする．このとき

$$|L_1(F)(t,x)| \le \sum_{j=0}^{N}L_1(\chi_j|F|)(t,x) \tag{3.6}$$

$$\le \sum_{j=0}^{N}\sup_{(s,y)\in\Lambda_j(t)}\{|y|^{\frac12}\langle|y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu}\langle c_js-|y|\rangle\chi_j(s,y)|F(s,y)|\}L_1(F_j)(t,x)$$

が, $F_j(s,y)=[|y|^{\frac12}\langle|y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu}\langle c_js-|y|\rangle]^{-1}$ として成り立つ.

まず，$1 \le j \le m$ のときは $c_j > 0$ なので, [31] の Theorem 1.1 より，

$$|L_1(F_j)(t,x)|\langle |x|+t\rangle^{\frac{1}{2}}\langle c_i t - |x|\rangle^{\kappa}$$

が有界であるとわかる．次に，$j=0$ の場合を考える．[31] の２節の計算に従って次を得る:

$$|L_1[F_0](t,x)| \le C(I_1 + I_2). \tag{3.7}$$

ここで,

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1(r,t)} \frac{\sqrt{\lambda}\langle \lambda + s\rangle^{-1-\kappa-\mu}\langle\lambda\rangle^{-1}}{\sqrt{(\lambda - s + t + r)(\lambda + s + r - t)}}\, d\lambda\, ds, \\ I_2 &= \iint_{\widetilde{D_1}(r,t)} \frac{\sqrt{\lambda}\langle \lambda + s\rangle^{-1-\kappa-\mu}\langle\lambda\rangle^{-1}}{\sqrt{(\lambda - s + t + r)(t - r - \lambda - s)}}\, d\lambda\, ds. \end{aligned}$$

とおいた. (3.7) により, 次を示せば十分である.

$$I_1 + I_2 \le C\langle t+r\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle t-r\rangle^{-\kappa}. \tag{3.8}$$

これを示すのに次の補題を使う (証明は, 例えば [31]).

Lemma 4. $\kappa > 0$, $b \in \mathbb{R}$ とするとき, 正定数 $C = C(\kappa)$ があって

$$\int_{|b|}^{\infty} \langle\alpha\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}(b+\alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha \le C\langle b\rangle^{-\kappa}, \tag{3.9}$$

$$\int_0^{\max(b,0)} \langle\alpha\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}(b-\alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha \le C\langle b\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle b\rangle^{[\frac{1}{2}-\kappa]_+}. \tag{3.10}$$

<u>*Case 1.*</u> $t + r \ge 1$ かつ $0 \le t \le 2r$.

まず，I_1, I_2 の定義式において

$$\alpha = s + \lambda, \quad \beta = \lambda, \tag{3.11}$$

によって変数変換すると,

$$I_1 \le C \int_{|t-r|}^{t+r} \langle\alpha\rangle^{-1-\kappa-\mu}(\alpha + r - t)^{-\frac{1}{2}} J_1(\alpha, r, t) d\alpha, \tag{3.12}$$

$$I_2 \le C \int_0^{\max(t-r,0)} \langle\alpha\rangle^{-1-\kappa-\mu}(t - r - \alpha)^{-\frac{1}{2}} J_2(\alpha, r, t) d\alpha \tag{3.13}$$

を得る. ここで

$$J_1(\alpha,r,t)=\int_{r-t}^{\alpha}\sqrt{\alpha+\beta}\langle\alpha+\beta\rangle^{-1}(\beta+r+t)^{-\frac{1}{2}}d\beta,\quad |t-r|<\alpha<t+r,$$

$$J_2(\alpha,r,t)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha+\beta}\langle\alpha+\beta\rangle^{-1}(\beta+r+t)^{-\frac{1}{2}}d\beta,\quad 0<\alpha<t-r.$$

$\beta\geq r-t$ に対して $\beta+r+t\geq 2r$ なので,

$$J_k(\alpha,r,t)\leq\frac{C}{\sqrt{r}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\langle\alpha+\beta\rangle^{-\frac{1}{2}}d\beta\leq C\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\quad(k=1,2).$$

よって,

$$\sqrt{r}I_1\leq C\int_{|t-r|}^{\infty}\langle\alpha\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}(\alpha+r-t)^{-\frac{1}{2}}d\alpha,$$

$$\sqrt{r}I_2\leq C\int_{0}^{\max(t-r,0)}\langle\alpha\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}(t-r-\alpha)^{-\frac{1}{2}}d\alpha.$$

$0<\kappa<1/2$ なので, Lemma 4 を使うと,

$$\sqrt{r}I_k(r,t)\leq C\langle t-r\rangle^{-\kappa}\quad(k=1,2).$$

これより (3.8) が従う.

<u>*Case 2.*</u> $0\leq t+r\leq 1$ または $0\leq 2r\leq t$.

定義から, $k=1,2$ に対して容易に次を得る:

$$J_k(\alpha,r,t)\leq C\int_{-\alpha}^{\alpha}\langle\alpha+\beta\rangle^{-1}d\beta\leq C\log(1+\langle\alpha\rangle),\quad 0<\alpha<t+r. \tag{3.14}$$

よって, (3.12) および (3.9) により

$$I_1\leq C\int_{|t-r|}^{\infty}\langle\alpha\rangle^{-1-\kappa}(\alpha+r-t)^{-\frac{1}{2}}d\alpha\leq C\langle t-r\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}$$

を得る. これより, I_1 の左辺は (3.8) の右辺で評価できる.

最後に, I_2 を評価する. $t>r$ として,

$$\begin{aligned}I_2\ \leq C\ &\int_{(t-r)/2}^{t-r}\langle\alpha\rangle^{-1-\kappa-\mu}(t-r-\alpha)^{-\frac{1}{2}}J_2(\alpha,r,t)d\alpha\\&+\int_{0}^{(t-r)/2}\langle\alpha\rangle^{-1-\kappa-\mu}(t-r-\alpha)^{-\frac{1}{2}}J_2(\alpha,r,t)d\alpha\end{aligned}$$

と積分を分ける. 右辺の第一項は, (3.14) により

$$C\langle t-r\rangle^{-\frac{1}{2}}\int_{0}^{t-r}\langle\alpha\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}(t-r-\alpha)^{-\frac{1}{2}}d\alpha$$

と評価できる. 一方, 右辺の第二項は, (3.14) または

$$J_2(\alpha,r,t) \le \frac{C}{\sqrt{t+r}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \langle \alpha+\beta \rangle^{-\frac{1}{2}} d\beta \le C\sqrt{\frac{\alpha}{t+r}}, \quad 0<\alpha<(t-r)/2.$$

なる評価を使うと,

$$C\langle t+r \rangle^{-\frac{1}{2}} \int_0^{t-r} \langle \alpha \rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa} (t-r-\alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha$$

で押さえられる. 結局, (3.10) により

$$I_2 \le C\langle t-r \rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}$$

が従う. 以上により, (3.8) が得られた. □

さらに, (3.1) の解の空間微分に対して次の評価が成り立つ (証明は [17]).

Proposition 3. $\ell = 1,2$, $0<\kappa<1/2$, $\mu>0$, $F \in C([0,T)\times\mathbb{R}^2)$ とする. また, (3.3) を仮定する. このとき, 全ての $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^2$ に対して, ℓ, μ, κ および c_j のみに依存する正定数 C が存在して

$$\begin{aligned} &|\partial_\ell L_{c_i}(F)(t,x)| \langle x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle c_i t - |x| \rangle^{1+\kappa} \qquad (3.15)\\ \le\ & C\sum_{j=0}^{N} \sup_{(s,y)\in\Lambda_j(t)} \{ |y|^{\frac{1}{2}} \langle |y|+s \rangle^{1+\kappa+\mu} \langle c_j s - |y| \rangle [\sum_{|a|\le 1} |\partial_x^a F(s,y)| + |\Omega_{1,2}F(s,y)|] \}. \end{aligned}$$

4. 定理の証明

方程式系 (1.1) に対する初期値問題が局所解をもつことはよく知られているので (例えば, Kato [25], Majda [36] など), 時間大域解の存在を示すにはア・プリオリ評価を導けばよい. 具体的には, 十分大きな自然数 k に対して, 次のような量を評価すれば良い: $1/4<\kappa<1/2$ として

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_k(t) \qquad (4.1)\\ :=\ & \sum_{i=1}^{N} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left[\langle t+|x| \rangle^{\frac{1}{2}} \langle |x|-c_i t \rangle^{\kappa} |u_i(t,x)|_{k+1} + \langle x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle |x|-c_i t \rangle^{1+\kappa} |\partial u_i(t,x)|_k \right]. \end{aligned}$$

そのためには次のような量を評価することが必要である:

$$\begin{aligned} D_k(t) &:= \|\partial u(t)\|_k + \|\partial\nabla u(t)\|_k + (1+t)^{-\frac{1}{p}} \|u(t)\|_X, \qquad (4.2)\\ \|u(t)\|_X &:= \sum_{|a|\le k} \|\Gamma^a u(t)\|_{\dot{H}^\rho}, \quad p = \frac{2}{1-\rho}\ (0<\rho<1/4). \end{aligned}$$

<u>*Step 1*</u>: 始めに $\|u(t)\|_X$ を評価する. (1.1) の解 $u_i(t,x)$ は, $C_{a,b}$ を適当な定数として

$$\Box_{c_i}\Gamma^a u_i = \sum_{|b|\le|a|} C_{a,b}\Gamma^b F_i(u,\partial u,\partial\nabla u) \tag{4.3}$$

を満たす. また, 適当な ϕ_i, ψ_i をとることにより, 初期条件は

$$\Gamma^a u_i(0,x) = \varepsilon\phi_i(x), \quad \partial_t\Gamma^a u_i(0,x) = \varepsilon\psi_i(x) \tag{4.4}$$

のように表せる. よって,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Gamma^a u_i](t,\xi) \;=\; & \varepsilon\cos(t|\xi|)\mathcal{F}[\phi_i](\xi) + \varepsilon|\xi|^{-1}\sin(t|\xi|)\mathcal{F}[\psi_i](\xi) \\ & + \sum_{|b|\le|a|} C_{a,b}\int_0^t |\xi|^{-1}\sin((t-s)|\xi|)\mathcal{F}[\Gamma^b F_i](s,\xi)ds\end{aligned} \tag{4.5}$$

を得る. ここで, $\mathcal{F}[v](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}v(x)dx$. 故に, 両辺を $\dot H^\rho$ ノルムで測ると

$$\|\Gamma^a u_i(t)\|_{\dot H^\rho} \le C\varepsilon(\|\phi_i\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\psi_i\|_{\dot H^{-1+\rho}}) + C\sum_{|a|\le k}\int_0^t \|\Gamma^a F_i(s)\|_{\dot H^{-1+\rho}}ds. \tag{4.6}$$

さらに, Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式から従う

$$\||\xi|^{-s}\mathcal{F}[\phi]\|_{L^2(\mathbb{R}^2_\xi)} \le C\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^2_x)}, \quad 0<s<1,\ q = 2(s+1)^{-1} \tag{4.7}$$

を用いると,

$$\|u(t)\|_X \le C\varepsilon(\|\phi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^q}) + C\sum_{|a|\le k}\int_0^t \|\Gamma^a F(s)\|_{L^q}ds \tag{4.8}$$

を得る. 但し, $q = 2/(2-\rho)$. また, p, q の選び方から, $1/q = (1/p) + (1/2)$ であることに注意する. 上式から, $\|\Gamma^a F(s)\|_{L^q}$ を評価すれば十分である.

以下では, $(s,x)\in\Lambda_l(t)$ $(0\le l\le N)$, $|a|\le k$ とする. このとき, (4.1) から

$$\sum_{j=1}^N(|u_j(s,x)|_{k+1} + |\partial u_j(s,x)|_k) \le C\,\mathcal{U}_k(t)\eta_l(|x|,s)^{-1}$$

が従う. ここで, $\eta_l(r,t) = \langle r+t\rangle^{\frac12}\langle c_l t - r\rangle^\kappa$ とおいた.

簡単の為, $F^{(3)}(u,\partial u,\partial\nabla u) \equiv F^{(3)}(\partial u,\partial\nabla u)$ の場合のみ考える. (1.25) および $F_i^{(3)}$ が $(\partial u,\partial\nabla u)$ に関する斉次三次式であることから,

$$\begin{aligned}|\Gamma^a H_i(s,x)| \;&\le\; C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^3\eta_l(|x|,s)^{-3}(|u(s,x)|_k + |\partial u(s,x)|_k + |\partial\nabla u(s,x)|_k), \\ |\Gamma^a F_i^{(3)}(s,x)| \;&\le\; C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2\eta_l(|x|,s)^{-2}(|\partial u(s,x)|_k + |\partial\nabla u(s,x)|_k)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t) \leq 1$ ならば，

$$|\Gamma^a F_i(s,x)| \leq C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2[\eta_l(|x|,s)^{-2}(|\partial u(s,x)|_k + |\partial\nabla u(s,x)|_k) + \eta_l(|x|,s)^{-3}|u(s,x)|_k] \tag{4.9}$$

が従う．これより，

$$\|\Gamma^a F_i(s)\|_{L^q} \leq C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2 \sum_{l=0}^{N}[\|\eta_l(|\cdot|,s)^{-2}\|_{L^p}(\|\partial u(s)\|_k + \|\partial\nabla u(s)\|_k) + \|\eta_l(|\cdot|,s)^{-3}|c_l s - |\cdot||^{\rho}\|_{L^p}\||c_l s - |\cdot||^{-\rho}|u(s)|_k\|_{L^2}]$$

を得る．この式の右辺を評価するのに次の二つの補題を使う．一つ目の補題は直接的な計算から，二つ目の補題は [9] の Theorem 4.4 と Lemma 4.3 (1) を組み合わせれば得られる．

Lemma 5. κ_1, $\kappa_2 > 0$, $c \geq 0$ および $1 \leq p \leq \infty$ とする．もし $p\kappa_1 \geq 1$ かつ $p\kappa_2 > 1$ ならば, $t \geq 0$ に対して

$$\|(1+t+|\cdot|)^{-\kappa_1}(1+|ct-|\cdot||)^{-\kappa_2}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\kappa_1+\frac{1}{p}}. \tag{4.10}$$

Lemma 6. $R \geq 0$, $0 \leq s < 1/2$ および $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して, R, v に依存しない正定数 C があって

$$\left\|\frac{v}{||\cdot|-R|^s}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.11}$$

さて，$\kappa > 1/4$, $0 < \rho < 1/4$ から $p > 2$ なので, $2\kappa p > 1$, $(3\kappa - \rho)p > 1$ が従う．故に，(4.10) より

$$\|\eta_l(|\cdot|,s)^{-2}\|_{L^p} \leq C(1+s)^{-1+\frac{1}{p}}, \quad \|\eta_l(|\cdot|,s)^{-3}|c_l s - |\cdot||^{\rho}\|_{L^p} \leq C(1+s)^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}}.$$

ここで，(4.2) を思い出すと，

$$\|\Gamma^a F_i(s)\|_{L^q} \leq C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2(1+s)^{-1+\frac{1}{p}}D_k(s). \tag{4.12}$$

よって, (4.8) から

$$(1+t)^{-\frac{1}{p}}\|u(t)\|_X \leq C\left[\varepsilon + (\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2\int_0^t(1+s)^{-1}D_k(s)ds\right]. \tag{4.13}$$

次に，$\|\partial u(t)\|_k$, $\|\partial\nabla u(t)\|_k$ を考える．必要なら双曲性が保たれる程 $\mathcal{U}_0(t)$ が十分小さいと仮定して，エネルギー法を使えば，

$$\|\partial u(t)\|_k + \|\partial\partial_x u(t)\|_k \le C\left[\varepsilon + (\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2\int_0^t (1+s)^{-1}D_k(s)ds\right] \tag{4.14}$$

を導くことができる．よって，(4.13) および (4.14) から，Gronwall の不等式を適用すれば，

$$D_k(t) \le C\varepsilon(1+t)^{C_1(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2} \quad \text{for} \quad 0 \le t < T \tag{4.15}$$

を得る．但し，C, C_1 は T, ε および u に依存しない正定数とする．

Step 2: 次に，“微分の損失” を認めて，非線型項に対するより良い評価を導く．

Lemma 7. (1.24) から (1.27) を仮定する．$1/4 < \kappa < 1/2$, $0 < \rho < 1/4$, $q \ge 0$, k を自然数とする．$0 \le \mu < 1/2$, $\theta > 0$ を次を満たすように選ぶ：

$$\mu + \theta \le \kappa, \quad \mu + \theta \le \frac{1}{2} - \kappa, \quad \mu + \theta \le 2\kappa - \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

このとき，

$$\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t) \le 1 \quad \mathit{for} \quad 0 \le t < T \tag{4.17}$$

ならば，$(s,y) \in \Lambda_l(t)$ $(0 \le l \le N)$ に対して，T, および u に依存しない正定数 C_2, C_3 が存在して

$$\begin{aligned} &|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_l s - |y|\rangle |F_i(u,\partial u,\partial\nabla u)(s,y)|_k \\ \le\ & C_2(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2(1+s)^{-\theta}D_{k+2}(s) + C_2(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t))^2[\langle |y|+s\rangle^{-q}\langle u(s,y)\rangle_k \\ &+C_3(q)\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}-q}[\partial u(s,y)]_{k+1}]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

但し，$C_3(q)$ は，$q \ge 1/2$ のとき $C_3(q) = 0$ を満たし，それ以外のとき $C_3(q) = 1$ を満たすものとする．

Proof. まず，

$$[u(t,x)]_k = \sum_{j=1}^N \langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle c_j s - |x|\rangle^{1+\kappa}|u_j(t,x)|_k, \tag{4.19}$$

$$\langle u(t,x)\rangle_k = \sum_{j=1}^N \langle |x|+t\rangle^{\frac{1}{2}}\langle c_j s - |x|\rangle^{\kappa}|u_j(t,x)|_k, \tag{4.20}$$

と定めると，$j=1,\cdots,N; l=0,1,\cdots,N$ に対して，$(s,y)\in\Lambda_j(t)$ ならば，

$$\begin{aligned} |u_j(s,y)|_k &\le \langle u(s,y)\rangle_k\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle c_js-|y|\rangle^{-\kappa}, && (4.21)\\ |\partial u_j(s,y)|_k &\le C[\partial u(s,y)]_k\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle c_js-|y|\rangle^{-1-\kappa} && (4.22)\end{aligned}$$

および，$(s,y)\in\Lambda_l(t)$ かつ $l\neq j$ ならば，

$$\begin{aligned} |u_j(s,y)|_k &\le C\langle u(s,y)\rangle_k\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}-\kappa}, && (4.23)\\ |\partial u_j(s,y)|_k &\le C[\partial u(s,y)]_k\langle |y|+s\rangle^{-1-\kappa}(1+|y|)^{-\frac{1}{2}} && (4.24)\end{aligned}$$

が成り立つ．また，次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} |y|^{\frac{1}{2}}|\partial u(s,y)|_{k+1} &\le CD_{k+2}(s), && (4.25)\\ \langle |y|-c_js\rangle^{-\rho}|y|^{\frac{1}{2}}|u(s,y)|_{k+1} &\le C(1+s)^{\frac{1}{p}}D_{k+2}(s). && (4.26)\end{aligned}$$

これらを示すには (4.2), (4.11) および次の不等式を用いればよい．

Lemma 8. $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $w\in C^1([0,\infty))$ とする．$w(r)>0$ $(r\ge 0)$ であり，ある正定数 A があって $|w'(r)|\le Aw(r)$ $(r\ge 0)$ を満たすものとする．このとき全ての $x\in\mathbb{R}^2$ に対して，x, v および w に依存しない正定数 C があって

$$|x|^{\frac{1}{2}}w(|x|)|v(x)|\le C\sum_{|a|\le 1}(\|w(|\cdot|)\Omega^a v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}+\|w(|\cdot|)\partial_r\Omega^a v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}). \qquad (4.27)$$

(この補題の証明は [26] の Proposition 1.)

以下では，$(s,y)\in\Lambda_l(t)$ とする．また，$F^{(3)}(u,\partial u,\partial\nabla u)\equiv F^{(3)}(\partial u,\partial\nabla u)$ を仮定する．(1.24) の右辺を項毎に評価していく．

始めに $N_{ij}(s,y)$ を評価する．$l=j$ のときは, Proposition 1, Lemma 3 から

$$\begin{aligned} &|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_js-|y|\rangle|N_{ij}(s,y)|_k\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2[\langle |y|+s\rangle^{-1+\kappa+\mu-q}\langle c_js-|y|\rangle^{1-2\kappa}|y|^{\frac{1}{2}}|\partial u_j(s,y)|_{k+1}\\ &\quad+\langle |y|+s\rangle^{-1+\kappa+\mu-q}\langle c_js-|y|\rangle^{-2\kappa}|y|^{\frac{1}{2}}|u(s,y)|_{k+1}]\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2\big[\langle |y|+s\rangle^{-\kappa+\mu-q}|y|^{\frac{1}{2}}|\partial u(s,y)|_{k+1}\\ &\quad+\langle |y|+s\rangle^{-1+\kappa+\mu-q}\langle c_js-|y|\rangle^{-\rho}|y|^{\frac{1}{2}}|u(s,y)|_{k+1}\big]\end{aligned}$$

が従う. ($1/4 < \kappa < 1/2$, $0 < \rho < 1/4$ に注意する.) (4.25), (4.26) により,

$$\begin{aligned}&|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_j s-|y|\rangle |N_{ij}(s,y)|_k\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k}{2}]+1}(t))^2\left[\langle |y|+s\rangle^{-\kappa+\mu}+\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}+\kappa+\mu}\right] D_{k+2}(s).\end{aligned}$$

($p>2$, $q \ge 0$ に注意する.) 一方, $l \neq j$ のときは, (4.24) より

$$\begin{aligned}&|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_l s-|y|\rangle |N_{ij}(s,y)|_k\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t))^2\langle |y|+s\rangle^{-\kappa+\mu}D_{k+2}(s).\end{aligned}$$

次に, $R_i(s,y)$ を評価する. (4.22), (4.24) より

$$\begin{aligned}&|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_l s-|y|\rangle |R_i(s,y)|_k\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t))^2\langle |y|+s\rangle^{-1+\mu-q}[\partial u(s,y)]_{k+1}.\end{aligned}$$

また, $q \ge 1/2$ ならば, (4.22), (4.25) より

$$\begin{aligned}&|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_l s-|y|\rangle |R_i(s,y)|_k\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t))^2\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}+\kappa+\mu}D_{k+2}(s).\end{aligned}$$

最後に, $H_i(s,y)$ を評価する. (4.21), (4.22) より

$$\begin{aligned}&|y|^{\frac{1}{2}}\langle |y|+s\rangle^{1+\kappa+\mu-q}\langle c_l s-|y|\rangle |H_i(s,y)|_k\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t))^3\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}+\kappa+\mu-q}\langle c_l s-|y|\rangle^{1-3\kappa}(|y|^{\frac{1}{2}}|\partial u(s,y)|_{k+1}+\langle u(s,y)\rangle_k)\\ \le\ & C(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]}(t))^2\{\langle |y|+s\rangle^{\frac{1}{2}-2\kappa+\mu}D_{k+2}(s)+\langle |y|+s\rangle^{-q}\langle u(s,y)\rangle_k\}.\end{aligned}$$

以上により, θ の取り方から, (4.18) が従うことが分かる. □

$|x-y| \le c_i(t-s)$ のとき, $s+|y| \le C(t+|x|)$ であることに注意して, Propositions 2 and 3 を使うと, 次の系を得る.

Corollary 1. 上の *Lemma* の仮定が満たされているものとする. $u \in C^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^2)$ を (1.1) に対する初期値問題の解とする. このとき, $\mathcal{U}_{[\frac{k+2}{2}]}(t)$ が十分小さければ, $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}\langle u(t,x)\rangle_{k+1}\langle |x|+t\rangle^{-q}\ \le\ & C_0\varepsilon + C_4(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]+1}(t))^2\left[(1+s)^{-\theta}D_{k+3}(s)\right.\\ &\left.+C_3(q)\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}-q}[\partial u(s,y)]_{k+2}\right],\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$[\partial_x u(t,x)]_k \langle |x|+t\rangle^{-q} \leq C_0\varepsilon + C_4(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]+1}(t))^2\Big[(1+s)^{-\theta}D_{k+3}(s) + C_3(q)\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}-q}[\partial u(s,y)]_{k+2}\Big] \tag{4.29}$$

を得る．但し，ε は初期値のサイズを表すものとする．

<u>Step 3</u>: $\mathcal{U}_N(t)$ は十分小さいと仮定してよいので，(4.15) から

$$D_{N+5}(t) \leq C\varepsilon(1+t)^{\theta} \quad \text{for} \quad 0 \leq t < T \tag{4.30}$$

とできる．よって，Corollary 1 から，$(t,x) \in \mathbb{R}\times[0,T)$，$k \leq N+2$ に対して，

$$\begin{aligned}&(\langle u(t,x)\rangle_{k+1} + [\partial_x u(t,x)]_k)\,\langle |x|+t\rangle^{-q}\\ &\leq C\varepsilon + C(\mathcal{U}_{[\frac{k+1}{2}]+1}(t))^2\left[\varepsilon + C_3(q)\langle |y|+s\rangle^{-\frac{1}{2}-q}[\partial u(s,y)]_{k+2}\right],\end{aligned} \tag{4.31}$$

を得る．特に，$q=1/2$ ととると

$$[\partial_x u(t,x)]_{k+2}\langle |x|+t\rangle^{-\frac{1}{2}} \leq C\varepsilon(1+(\mathcal{U}_{[\frac{k+3}{2}]+1}(t))^2).$$

これを，(4.31) で $q=0$ としたものに代入すると，

$$\langle u(t,x)\rangle_{k+1} + [\partial_x u(t,x)]_k \leq C\varepsilon(1+(\mathcal{U}_{[\frac{k+3}{2}]+1}(t))^2).$$

よって，$N \geq 5$ ならば，

$$\langle u(t,x)\rangle_{N+1} + [\partial_x u(t,x)]_N \leq C\varepsilon(1+(\mathcal{U}_N(t))^2)$$

を結論できる．また，t 微分については，有限伝播性と $S = t\partial_t + r\partial_r$ を利用して，

$$\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle c_i s - |x|\rangle^{1+\kappa}|\partial_t u_i(t,x)|_k \leq C([\partial_l u(t,x)]_k + \langle u(t,x)\rangle_{k+1}) \tag{4.32}$$

と評価できるので，結局

$$\mathcal{U}_N(t) \leq C\varepsilon(1+(\mathcal{U}_N(t))^2) \quad \text{for} \quad 0 \leq t < T \tag{4.33}$$

を得る．従って，ε を十分小さく選べば，局所解が時間大域的に延長できることが分かる．

References

[1] R. Agemi, Blow-up of solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions, *Manuscripta Math.* **73** (1991), 153–162.

[2] R. Agemi and K. Yokoyama, The null conditions and global existence of solutions to systems of wave equations with different propagation speeds, *in* "Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics" (S. Kawashima and T. Yanagisawa ed.), Series on Adv. in Math. for Appl. Sci., Vol. 48, 43–86, World Scientific, Singapore, 1998.

[3] S. Alinhac, Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions, II, *Acta Math.* **182** (1999), 1–23.

[4] S. Alinhac, The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions, II, *Amer. J. Math.* **123** (2000), 1071–1101.

[5] S. Alinhac, The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions I, *Invent. Math.* **145** (2001), 597–618.

[6] S. Alinhac, An example of blowup at infinity for a quasilinear wave equation, *Astérisque, Autour de l'analyse microlocale* **284** (2003), 1–91.

[7] D. Christodoulou, Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 267–282.

[8] R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical physics", Vol.II, Interscience Publ.,1962.

[9] P. D'Ancona, V. Georgiev and H. Kubo, Weighted decay estimates for the wave equation *J. Differential Equations* **163** (2001), 146–208.

[10] P. Godin, Lifespan of semilinear wave equations in two space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **18** (1993), 895–916.

[11] K. Hidano, *The global existence theorem for quasi-linear wave equations with multiple speeds,* to appear in *Hokkaido Math. J.*

[12] L. Hörmander, The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations, *Lecture Note in Math.*, **1256** (1987), 214–280.

[13] A. Hoshiga, The asymptotic behaviour of the radially symmetric solutions to quasilinear wave equations in two space dimensions, *Hokkaido Math. J.*, **24** (1995), 575–615.

[14] A. Hoshiga, The lifespan of solutions to quasilinear hyperbolic systems in two space dimensions, Nonlinear Analysis, **42** (2000), 543–560.

[15] A. Hoshiga, Existence and blowing up of solutions to systems of quasilinear wave equations in two space dimensions, *Preprint.*

[16] A. Hoshiga and H. Kubo, Global small amplitude solutions of nonlinear hyperbolic systems with a critical exponent under the null condition, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), 486–513.

[17] A. Hoshiga and H. Kubo, Global solvability for systems of nonlinear wave equations with multiple speeds in two space dimensions, *Preprint.*

[18] F. John, Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in three space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 29–51.

[19] F. John, Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions, *Mat. Apl. Comput.*, **V** (1985), 3–18.

[20] F. John, Nonlinear wave equations, Formation of singularities, *Pitcher lectures in mathematical sciences, Lehigh Univ.*, American Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[21] S. Katayama, Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **31** (1995), 645–665.

[22] S. Katayama, Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds, *Preprint.*

[23] S. Katayama, Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms, *Preprint.*

[24] S. Katayama and K. Yokoyama, Global small amplitude solutions to systems of nonlinear wave equations with multiple speeds, in preparation.

[25] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **58** (1975), 191–205.

[26] S. Klainerman, Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985), 321–332.

[27] S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations, *Lectures in Appl. Math.* **23** (1986), 293–326.

[28] S. Klainerman, *Remarks on the global Sobolev inequalities in the Minkowski space* $\mathbb{R}^{n+1}$, *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1987), 111–117.

[29] S. Klainerman and T. C. Sideris, On almost global existence for nonrelativistic wave equations in $3D$, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 307–321.

[30] M. Kovalyov, Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations, *J. Differential Equations* **77** (1989), 73–83.

[31] H. Kubo and K. Kubota, Scattering for systems of semilinier wave equations with different speeds of propagation, *Advances in Diff. Eq.* **7** (2002), 441–468.

[32] H. Kubo and M. Ohta, On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions, *Preprint.*

[33] K. Kubota and K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation, *Japanese J. Math.* **27** (2001), 113–202.

[34] Li Ta-tsien and Zhou Yi, *Nonlinear satbility for two space dimensional wave equations with higher order perturbations, Nonlinear World* **1** (1994), 35–58.

[35] H. Lindblad, Global solutions of nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992) 1063–1096.

[36] A. Majda, "Compressible fluid flow and systems of conservation laws", Appl. Math. Sci. **53**, Springer-Verlag, 1984.

[37] M. Ohta, *Counterexample to global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds, Funkcialaj Ekvacioj* **46** (2003), 471–477.

[38] T. C. Sideris and S.-Y. Tu, Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds, *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2001), 477–488.

[39] C.D. Sogge, *Global existence for nonlinear wave equations with multiple speeds,* Harmonic Analysis at Mount Holyoke, Contemp. Math. No. 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[40] K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions, *J. Math. Soc. Japan* **52** (2000), 609–632.